SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Cataldo Grammatico

UN RISULTATO DI UNICITÀ FORTE PER L'OPERATORE DI LAPLACE

29 maggio 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Riassunto. Diamo un risultato abbastanza preciso di unicità forte per l'operatore di Laplace nel caso di diseguaglianze differenziali con potenziali singolari. Enunciamo il nostro risultato principale dopo aver richiamato alcuni contibuti recenti al problema, alla luce dei quali il nostro risulta essere "quasi ottimale".

Abstract. We exhibit a strong uniqueness result for the Laplace operator when dealing with differential inequalities with singular potentials. First we racall some recent contribution to the problem and then We state our main result which, compared with these previous contributions, turns out to be "almost optimal".

1 Introduzione

Scopo di questo seminario è presentare un risultato di unicità forte per diseguaglianze del tipo

$$|\Delta u(x)| \leq |V(x)u(x)| + |W(x)|\,|\nabla u(x)| \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

con Ω intorno di zero in $\mathbf{R}^n$.

Il problema si può così formulare: per quali funzioni $V(x)$ e $W(x)$ vale la proprietà di prolungamento unico con $u(x)$ verificante la stima (1) e appartenente ad un opportuno spazio di funzioni?

Più esattamente, assegnate due funzioni $V(x)$ e $W(x)$ definite in un intorno Ω di zero, e presa $u(x)$ una qualunque funzione appartenente ad un certo spazio $\mathcal{X}$ e verificante (1), allora necessariamente $u(x)$ è la funzione identicamente nulla?

Questo opportuno spazio di funzioni $\mathcal{X}$ per noi sarà lo spazio delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ e piatte in zero, che indicheremo con $C_\flat^\infty(\Omega)$ ($f(x)$ piatta in zero se $D^\alpha f(0) = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbf{N}^n$). Diremo che la stima (1) ha la proprietà del prolungamento unico forte se la risposta, in questo caso, è affermativa.

La questione diviene delicata se si consente a $V(x)$ e $W(x)$ di essere molto singolari.

I primi risultati con $V(x)$ e $W(x)$ singolari sono di Aronszajn, Krzywicki e Szarski [6] i quali esaminano potenziali $V(x)$ e $W(x)$ con singolarità della forma

$$|V(x)| \leq |x|^{-2+\varepsilon} \tag{2}$$

$$|W(x)| \leq |x|^{-1+\varepsilon} \tag{3}$$

con $\varepsilon > 0$.

Dopo questi risultati, numerosi autori si sono interessati a problemi di continuazione unica con $V(x)$ e $W(x)$ aventi singolarità di tipo L^p (Hörmander [9], Barcelo, Kenig, Ruiz, Sogge [7])

Nel 1993 Regbaoui [13] nella sua tesi di dottorato, dimostra un risultato di unicità forte per $V(x)$ e $W(x)$ soddisfacenti la seguente stima

$$|V(x)| \leq C_1\,|x|^{-2} \tag{4}$$

$$|W(x)| \leq C_2\,|x|^{-1} \tag{5}$$

purchè $C_2 < 1/2$.

Noi proveremo in particolare che se $\Omega = B_R = \{x \in \mathbf{R}^2 \ t.c. \ |x| < R\}$ e

$$|r^2 \triangle u(x)| \leq C\,|r\partial_r u(x)| \qquad \forall\, x \in \Omega \tag{6}$$

oppure

$$|r^2 \triangle u(x)| \leq C\,|\partial_\omega u(x)| \qquad \forall\, x \in \Omega \tag{7}$$

con $C < 1$ e u funzione $C^\infty(\Omega)$ e piatta in zero, allora $u \equiv 0$ in Ω.

Otterremo inoltre, come Corollario del nostro risultato (Teorema 2.1), che la costante C_2 in (5) si può elevare fino a $1/\sqrt{2}$.

Nel 1994 Alinhac e Baouendi [4] hanno dimostrato che $\forall C > 1$ esiste $u \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, piatta in zero con *supp* $u \equiv \mathbf{R}^2$ e soddisfacente la stima

$$|\triangle u(x)| \leq \frac{C}{r^2}\,|\partial_\omega u(x)| \qquad x \in \mathbf{R}^2 \tag{8}$$

e quindi anche

$$|\triangle u(x)| \leq \frac{C}{r}\,|\nabla u(x)| \qquad x \in \mathbf{R}^2, \tag{9}$$

così nella stima (1) con $V(x) = C_1\,|x|^{-2}$ e $W(x) = C_2\,|x|^{-1}$ la continuazione unica forte vale di sicuro se $C_2 < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, non vale se $C_2 > 1$.

Osserviamo, alla luce del nostro risultato, che il Teorema in Alinhac e Baouendi [4] è ottimale, nel senso che

- $\forall C > 1,\ \exists u \in C_\flat^\infty(\mathbf{R}^2)\ t.c.\ |r^2 \triangle u(x)| \leq C\,|\partial_\omega u(x)| \qquad supp\ u \equiv \mathbf{R}^2$

mentre

- *se* $u \in C_\flat^\infty(\Omega)$ *e* $|r^2 \triangle u(x)| \leq C'\,|\partial_\omega u(x)| \quad x \in \Omega$ con $C' < 1$, allora $u \equiv 0$ in Ω.

2 Risultati

In coordinate polari $|x| = r \in]0, +\infty[$ e $\dfrac{x}{|x|} = \omega \in \mathbf{S}^{n-1}$, l'operatore di Laplace assume la forma

$$r^2 \triangle = (r\partial_r)^2 + (n-2)(r\partial_r) + \triangle_\omega \tag{10}$$

dove $\triangle_\omega$ è l'operatore di Laplace-Beltrami.

Ricordiamo che $\triangle_\omega$ è un operatore non limitato, autoaggiunto e negativo su $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$. Ricordiamo inoltre che lo spettro di $-\triangle_\omega$ è costituito interamente dai valori propri $k(k+n-2)$ con $k \in \mathbf{N}$ e autospazio corrispondente E_k di dimensione finita.

Inoltre $\mathbf{H} = L^2(\mathbf{S}^{n-1})$ è somma diretta degli E_k, in formule $\mathbf{H} = \bigoplus_{k\geq 0} E_k$ e $E_k \perp E_h$ se $k \neq h$.

Notazioni: con $\|\cdot\|$ e $\langle\,,\,\rangle$ noi intenderemo sempre norma e prodotto scalare in $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$.

D'ora in avanti $\Omega \equiv B_R = \{x \in \mathbf{R}^n \ t.c. \ |x| < R\}$, Ω_j campi vettoriali su $\mathbf{S}^{n-1}$ (v. Appendice); vale allora il seguente

Teorema 2.1 *Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e soddisfacente per ogni $x \in \Omega$ la stima*

$$|\triangle u(x)|^2 \leq \frac{M^2}{|x|^4}|u(x)|^2 + \frac{A^2}{|x|^2}|\partial_r u(x)|^2 + \frac{B^2}{|x|^4}\sum_j |\Omega_j u(x)|^2 \qquad (11)$$

con M, A, B costanti positive. Se

$$A^2 + B^2 < 1 \qquad (12)$$

allora $u \equiv 0$ in Ω.

Corollario 2.1 *Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$ e verifichi in Ω la stima*

$$|\triangle u(x)| \leq \frac{\mathcal{M}}{|x|^2}|u(x)| + \frac{\mathcal{C}}{|x|}|\nabla u(x)|\,,$$

per certe costanti positive $\mathcal{M}$, $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, allora $u \equiv 0$ in Ω.

Oss. 2.1 *In* (11)-(12) *sono compresi i casi* (6) e (7).

Ricordiamo che, con E_k come sopra, $dim\, E_0 = 1$, $dim\, E_1 = n$, mentre

$$dim\, E_k = \binom{n-1+k}{k} - \binom{n-1+k-2}{k-2} = O\left(k^{n-2}\right) \qquad \text{se } k \geq 2\,.$$

Sia $l(k) = dim\, E_k$, indichiamo con $\varphi_{k,l}(\omega)$ $l = 1, 2, \ldots, l(k)$ una base ortonormale di E_k.

Introduciamo infine le coordinate $(T, \omega) \in \mathbf{R} \times \mathbf{S}^{n-1}$ con $T = \log r$.

Gli strumenti per provare il Teorema sono le stime a priori tipo Carleman.

Il Teorema 2.1 è una conseguenza del seguente

Teorema 2.2 *Per ogni coppia di costanti $C, C' < 1$ esiste $\tau_0(C, C')$ tale che, la seguente stima*

$$\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\iint e^{-2\tau T}\,|QU|^2\,dTd\omega \geq \frac{\tau}{2}\iint e^{-2\tau T}\,|U|^2\,dTd\omega + \alpha C'\iint e^{-2\tau T}\,|\partial_T U|^2\,dTd\omega + (1-\alpha)\,C\sum_j \iint e^{-2\tau T}\,|\Omega_j U|^2\,dTd\omega \tag{13}$$

vale, per ogni funzione $U \in C_0^\infty\left((-\infty,+\infty)\times \mathbf{S}^{n-1}\right)$ per ogni $\alpha \in [0\,,\,1]$ e per ogni $\tau \geq \tau_0(C, C')$ semintero.

Dim. Teorema 2.2— Sia $V \in C_0^\infty\left((-\infty,+\infty)\times \mathbf{S}^{n-1}\right)$, possiamo scrivere

$$V(T,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} f_{k,l}(T)\varphi_{k,l}(\omega)\,, \tag{14}$$

$\varphi_{k,l}(\omega)$ base ortonormale di E_k.

Osserviamo che

$$\iint |V(T,\omega)|^2\,dTd\omega = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)}\int |f_{k,l}(T)|^2\,dT \tag{15}$$

poichè

$$\|V(T,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbf{S}^{n-1})} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} |f_{k,l}(T)|^2\,. \tag{16}$$

Poniamo

$$Q = r^2\Delta \tag{17}$$

e

$$Q_\tau V = e^{-\tau T}Q(e^{\tau T}V)\,. \tag{18}$$

Scriviamo

$$\|Q_\tau V(T,\cdot)\|^2 = \left\|\left(\partial_T^2 + (2\tau+n-2)\,\partial_T + \tau\,(\tau+n-2) + \Delta_\omega\right)V\right\|^2 \tag{19}$$

quindi

$$\begin{aligned}\int \|Q_\tau V(T,\cdot)\|^2\,dT \;=\; & \int \langle \partial_T^2 V, \partial_T^2 V\rangle\,dT + 2\int \langle \partial_T^2 V, \triangle_\omega V\rangle\,dT \\ & + 2\tau\,(\tau+n-2)\int \langle \partial_T^2 V, V\rangle\,dT \\ & + (2\tau+n-2)^2 \int \langle \partial_T V, \partial_T V\rangle\,dT \\ & + \tau^2\,(\tau+n-2)^2 \int \langle V, V\rangle\,dT \\ & + 2\tau\,(\tau+n-2)\int \langle V, \triangle_\omega V\rangle\,dT \\ & + \int \langle \triangle_\omega V, \triangle_\omega V\rangle\,dT\end{aligned} \tag{20}$$

[$d\omega$ misura standard su $\mathbf{S}^{n-1}$].

Da (v. Appendice)

$$-\triangle_\omega = \sum_j \Omega_j^* \Omega_j$$

ricaviamo

$$\int \langle \triangle_\omega V, \partial_T^2 V\rangle\,dT = \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} dT \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\partial_T \Omega_j V|^2\,d\omega \tag{21}$$

analogamente

$$\int \langle \partial_T^2 V, \triangle_\omega V\rangle\,dT = \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} dT \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |\partial_T \Omega_j V|^2\,d\omega \tag{22}$$

così

$$\begin{aligned}\iint |Q_\tau V|^2\,dT\,d\omega \;\geq\; & -2\tau\,(\tau+n-2)\sum_j \int \|\Omega_j V(T,\cdot)\|^2\,dT \\ & + \left(2\tau^2 + 2\tau\,(n-2) + (n-2)^2\right)\int \|\partial_T V(T,\cdot)\|^2\,dT \\ & + \tau^2\,(\tau+n-2)^2 \int \|V(T,\cdot)\|^2\,dT + \int \|\triangle_\omega V(T,\cdot)\|^2\,dT\end{aligned} \tag{23}$$

La (23) si può scrivere anche

$$\begin{aligned}\iint |Q_\tau V|^2\, dT d\omega \;\geq\; & 2\tau\,(\tau+n-2)\int \langle V(T,\cdot), \triangle_\omega V(T,\cdot)\rangle\, dT \\ & + \left(2\tau^2+2\tau\,(n-2)+(n-2)^2\right)\int \|\partial_T V(T,\cdot)\|^2\, dT \\ & + \tau^2\,(\tau+n-2)^2\int \|V(T,\cdot)\|^2\, dT + \int \|\triangle_\omega V(T,\cdot)\|^2\, dT\end{aligned} \tag{24}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\iint |Q_\tau V|^2\, dT d\omega \geq\; & \tau^2\,(\tau+n-2)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} \int |f_{k,l}(T)|^2\, dT \\ & - 2\tau\,(\tau+n-2)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} k\,(k+n-2)\int |f_{k,l}(T)|^2\, dT \\ & + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{l(k)} k^2\,(k+n-2)^2\int |f_{k,l}(T)|^2\, dT \\ & + 2\tau^2\int \|\partial_T V(T,\cdot)\|^2\, dT\end{aligned} \tag{25}$$

Per ogni $\tau \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$ e $l = 1, 2, \ldots, l\,(k)$ si ha

$$\begin{aligned}\left(\tau\,(\tau+n-2) - k\,(k+n-2)\right)^2 \int |f_{k,l}(T)|^2\, dT \;=\; & \\ = \tau^2\,(\tau+n-2)^2\int |f_{k,l}(T)|^2\, dT & \\ - 2\tau k\,(\tau+n-2)\,(k+n-2)\int |f_{k,l}(T)|^2\, dT & \\ + k^2\,(k+n-2)^2\int |f_{k,l}(T)|^2\, dT &\end{aligned} \tag{26}$$

Scriviamo

$$\left(\tau\,(\tau+n-2) - k\,(k+n-2)\right)^2 = (\tau-k)^2\,(\tau+k+n-2)^2\ .$$

D'ora in avanti, considereremo τ della forma $\tau = m+\frac{1}{2}$, $m \in \mathbf{N}$; fissiamo τ come detto e analizziamo i vari casi:

- per $k \neq m, m+1$

$$(\tau - k)^2 \geq 1 \quad \text{e} \quad (\tau + k + n - 2)^2 \geq k\,(k+n-2)$$

così

$$(\tau\,(\tau + n - 2) - k\,(k+n-2))^2 \geq k\,(k+n-2)\,,$$

- per $k = m$

$$(\tau - k)^2 = \frac{1}{4}$$

ma

$$(\tau + k + n - 2)^2 \geq (2k + n - 2)^2 \geq 4k\,(k+n-2)$$

e ancora

$$(\tau\,(\tau + n - 2) - k\,(k+n-2))^2 \geq k\,(k+n-2)\,,$$

- se $k = m+1$

$$(\tau + k + n - 2)^2 = 4\left(k + \frac{n-2}{2} - \frac{1}{4}\right)^2$$

quindi

$$(\tau - k)^2\,(\tau + k + n - 2)^2 = \left(k + \frac{n-2}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 \sim k\,(k+n-2)$$

per k sufficientemente grande ossia per τ sufficientemente grande.

Insomma abbiamo dimostrato che, $\forall C < 1$ a partire da un certo $\tau_0(C)$ in poi, vale

$$\iint |Q_\tau V|^2\,dT\,d\omega \geq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} k\,(k+n-2) \int |f_{k,l}(T)|^2\,dT. \qquad (27)$$

Facciamo notare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} k\,(k+n-2) \int |f_{k,l}(T)|^2\,dT = C \sum_{j} \int \|\Omega_j V(T,\cdot)\|^2\,dT. \qquad (28)$$

Ponendo $U = e^{\tau T} V$ otteniamo

$$\iint e^{-2\tau T} |QU|^2 \, dT d\omega \geq C \sum_j \iint e^{-2\tau T} |\Omega_j U|^2 \, dT d\omega$$

$\forall C < 1$ e $\tau \geq \tau_0(C)$.

Essendo la relazione $-(\tau(\tau + n - 2) - k(k + n - 2))-$ simmetrica rispetto a $-\tau, k-$, ripetendo lo stesso ragionamento possiamo concludere che: $\forall C' < 1$ e $\tau \geq \tau_0(C')$ si ha, tenuto conto di (25),

$$\begin{aligned} \iint |Q_\tau V|^2 \, dT d\omega \;\geq\; & C' \tau (\tau + n - 2) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} \int |f_{k,l}(T)|^2 \, dT \\ & + \; 2\tau^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} \int |\partial_T f_{k,l}(T)|^2 \, dT \end{aligned} \tag{29}$$

quindi anche

$$\iint |Q_\tau V|^2 \, dT d\omega \geq C' \left(\tau^2 \int \|V(T,\cdot)\|^2 \, dT + \int \|\partial_T V(T,\cdot)\|^2 \, dT \right) \tag{30}$$

e ponendo come prima $U = e^{\tau T} V$, da (30) otteniamo

$$\iint e^{-2\tau T} |QU|^2 \, dT d\omega \geq C' \iint e^{-2\tau T} |\partial_T U|^2 \, dT d\omega \,. \tag{31}$$

Sia $\alpha \in [0,1]$ e siano C e C' costanti positive < 1, si ha

$$\begin{aligned} \iint |Q_\tau V|^2 \, dT d\omega \geq \alpha C' & \iint |(\partial_T + \tau) V|^2 \, dT d\omega \\ & + (1 - \alpha) C \sum_j \iint |\Omega_j V|^2 \, dT d\omega \end{aligned} \tag{32}$$

per $\tau \geq \tau_0(C, C')$.

Se $U = e^{\tau T} V$ otteniamo

$$\begin{aligned} \iint e^{-2\tau T} |QU|^2 \, dT d\omega \geq \alpha C' & \iint e^{-2\tau T} |\partial_T U|^2 \, dT d\omega \\ & + \; (1 - \alpha) C \sum_j \iint e^{-2\tau T} |\Omega_j U|^2 \, dT d\omega \end{aligned} \tag{33}$$

$\forall\, U \in C_0^\infty\big((-\infty,+\infty)\times \mathbf{S}^{n-1}\big)$, per ogni $C, C' < 1$ e per ogni $\tau \geq \tau_0\,(C, C')$.

Osserviamo che da (30) si ha anche

$$\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1} \iint e^{-2\tau T}\,|QU|^2\,dT d\omega \geq \frac{\tau}{2} \iint e^{-2\tau T}\,|U|^2\,dT d\omega\,, \tag{34}$$

quindi da (33) e (34) segue il Teorema.

Torniamo ora al Teorema 2.1

Dim. Teorema 2.1— Sia $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ uguale a 1 in $(-\infty, T_0)$ con $e^{T_0} < R$ e $supp\,\chi \subseteq (-\infty\,, \log R)$; con un passaggio al limite si vede facilmente che la stima (13) vale anche per la funzione χu con u che soddisfa le ipotesi del Teorema, cioè

$$|Qu|^2 = \left|e^{2T}\triangle u\right|^2 \leq M^2\,|u|^2 + A^2\,|\partial_T u|^2 + B^2 \sum_j |\Omega_j u|^2 \tag{35}$$

in B_R e u piatta in zero.

Applicando (13) a χu si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|Qu(T,\cdot)\|^2\,dT + \int_{T_0}^{+\infty} e^{-2\tau T}\,\|Q(\chi u)(T,\cdot)\|^2\,dT \geq \qquad (36)\\ \frac{\tau}{2}\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} \int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|u(T,\cdot)\|^2\,dT\\ +\ \alpha C'\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} \int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|\partial_T u(T,\cdot)\|^2\,dT\\ +\ (1-\alpha)\,C\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)^{-1} \sum_j \int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|\Omega_j u(T,\cdot)\|^2\,dT.\end{aligned}$$

Poniamo ora

$$\mathfrak{R}(T) = M^2\,\|u(T,\cdot)\|^2 + A^2\,\|\partial_T u(T,\cdot)\|^2 + B^2 \sum_j \|\Omega_j u(T,\cdot)\|^2\,.$$

Da (35) si ha

$$\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\mathfrak{R}(T)\,dT + \int_{T_0}^{+\infty} e^{-2\tau T}\,\|Q(\chi u)(T,\cdot)\|^2\,dT \geq \tag{37}$$

$$\frac{\tau}{2}\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|u(T,\cdot)\|^2\,dT$$
$$+\,\alpha C'\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|\partial_T u(T,\cdot)\|^2\,dT$$
$$+\,(1-\alpha)\,C\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}\sum_j\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|\Omega_j u(T,\cdot)\|^2\,dT$$

ossia

$$\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\int_{T_0}^{+\infty} e^{-2\tau T}\,\|Q(\chi u)(T,\cdot)\|^2\,dT \geq \tag{38}$$
$$\left(\frac{\tau}{2}-M^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\right)\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|u(T,\cdot)\|^2\,dT$$
$$+\,\left(\alpha C'-A^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\right)\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|\partial_T u(T,\cdot)\|^2\,dT$$
$$+\,\left((1-\alpha)\,C-B^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\right)\sum_j\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|\Omega_j u(T,\cdot)\|^2\,dT$$

Ora se $A^2+B^2<1$ a patto di prendere τ grande, possiamo trovare $C, C'<1$ e $\alpha\in[0,1]$ tale che

- $\alpha C'-A^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)>0$
- $(1-\alpha)\,C-B^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)>0\,.$

Così

$$\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\int_{T_0}^{+\infty} e^{-2\tau T}\,\|Q(\chi u)(T,\cdot)\|^2\,dT \geq \tag{39}$$
$$\left(\frac{\tau}{2}-M^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\right)\int_{-\infty}^{T_0} e^{-2\tau T}\,\|u(T,\cdot)\|^2\,dT$$

e quindi

$$\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\int_{T_0}^{+\infty} \|Q(\chi u)(T,\cdot)\|^2\,dT \geq \tag{40}$$
$$\left(\frac{\tau}{2}-M^2\left(1+\left(\frac{\tau}{2}\right)^{-1}\right)\right)\int_{-\infty}^{T_0} \|u(T,\cdot)\|^2\,dT.$$

Facendo tendere $\tau \to +\infty$ lungo i semi-interi, si ricava $u \equiv 0$ in B_{R_0}, con $R_0 = e^{T_0}$. Essendo $R_0 < R$ arbitrario, segue che $u \equiv 0$ in B_R.

Abbiamo così provato il Teorema.

Dim. Corollario—Prendendo $A = B$ la condizione $A^2 + B^2 < 1$ diventa $2C^2 < 1$, dove $C = A = B$, mentre (11) assume la forma

$$|\triangle u(x)|^2 \leq \frac{M^2}{|x|^4}|u(x)|^2 + \frac{C^2}{|x|^2}|\nabla u(x)|^2 \qquad x \in \Omega \tag{41}$$

e quindi

$$|\triangle u(x)| \leq \frac{M}{|x|^2}|u(x)| + \frac{C}{|x|}|\nabla u(x)| \qquad x \in \Omega \tag{42}$$

con $C < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Viceversa se

$$|\triangle u(x)| \leq \frac{\mathcal{M}}{|x|^2}|u(x)| + \frac{C}{|x|}|\nabla u(x)| \qquad x \in \Omega \tag{43}$$

con $C < \frac{1}{\sqrt{2}}$, allora vale anche

$$|\triangle u(x)|^2 \leq \frac{M^2}{|x|^4}|u(x)|^2 + \frac{C^2}{|x|^2}|\nabla u(x)|^2 \qquad x \in \Omega \tag{44}$$

con $2C^2 < 1$ e M opportunamente grande.

Possiamo ora applicare il Teorema 2.1, dimostrando il Corollario.

3 Appendice

Coordinate Polari

Indichiamo con $\mathbf{S}^{n-1}$ la sfera unitaria di $\mathbf{R}^n$, esiste allora un diffeomorfismo naturale tra $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ e $]0, +\infty[\times \mathbf{S}^{n-1}$ dato da

$$x \to (r, \omega) = \left(|x|, \frac{x}{|x|}\right). \tag{45}$$

Nelle nuove coordinate, i campi vettoriali canonici $\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, ...n)$ diventano

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\Omega_j \tag{46}$$

dove $r = |x|$, $\omega_j = \frac{x_j}{|x|}$ e Ω_j campi di vettori su $\mathbf{S}^{n-1}$.

Un semplice calcolo dimostra che i campi Ω_j godono delle seguenti proprietà

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \Omega_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n} \Omega_j \omega_j = n - 1 \,. \tag{47}$$

L'aggiunto dell'operatore Ω_j , visto come operatore non limitato in $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$, è

$$\Omega_j^* = (n-1)\omega_j - \Omega_j \qquad j = 1, ..., n \tag{48}$$

così l'operatore di Laplace-Beltrami si può scrivere

$$\triangle_\omega = \sum_{j=1}^{n} \Omega_j^2 \tag{49}$$

con l'aiuto di (47) e (48), si vede facilmente che $\triangle_\omega$ è un operatore autoaggiunto negativo in $L^2(\mathbf{S}^{n-1})$.

Riferimenti bibliografici

[1] S.ALINHAC: Non-unicité pour des opérateurs differentiels à caractéristiques complexes simples, Ann. Sci. École Norm. Sup. **13** (1980), 385-393.

[2] S.ALINHAC, M.S.BAOUENDI: Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978-1979, exposé XXII.

[3] S.ALINHAC, M.S.BAOUENDI: Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities, Amer. J. Math. **102** (1980), 179-217.

[4] S.ALINHAC, M.S.BAOUENDI: A counterexample to strong uniqueness for partial differential equations of Schrödinger type, Comm. P.D.E. **19** (1994), 1727-1733.

[5] W.O.AMREIN, A.M.BERTHIER, V.GEORGESCU: L^p inequalities for the Laplacian and unique continuation, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **31** (1981), 153-168.

[6] N.ARONSZAJN, A.KRZYWICKI, J.SZARSKI: A unique continuation theorem for exterior differential forms on Riemannian manifolds, Ark. Mat. **4** (1962), 417-453.

[7] B.BARCELO, C.E.KENIG, A.RUIZ, C.D.SOGGE: Weighted Sobolev inequalities for the Laplacian plus lower order terms, Illinois J. Math. **32** (1988), 230-245.

[8] T.CARLEMAN: Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partièlles à deux variables indépendantes, Ark. Mat. **26** B (1939), 1-9.

[9] L.HÖRMANDER: Uniqueness theorems for second order elliptic differential equations, Comm. P.D.E. **8** (1983), 21-64.

[10] D.JERISON: Carleman inequalities for the Dirac and Laplace operators and unique continuation, Adv. Math. **62** (1986), 118-134.

[11] D.JERISON, C.E.KENIG: Unique continuation and absence of positive eigenvalues for Schrödinger operators, Ann. of Math. **121** (1985).

[12] N.LERNER: Resultats d'unicité forte pour des opérateurs elliptiques à coefficients Gevrey, Comm. P.D.E. **6** (1981), 1163-1177.

[13] R.REGBAOUI: Prolongement unique pour les opérateurs de Schrödinger, Tesi di Dottorato, Università di Rennes (1993).

[14] T.WOLFF: Recent work on sharp estimates in second-order elliptic unique continuation problems, J. Geom. Anal. **3** (1993), 621-650.